

显式 Runge-Kutta 局部间断 Galerkin 方法的稳定性分析

毕 卉, 钱琛庚

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 针对二阶显式 TVD Runge-Kutta 局部间断 Galerkin 方法求解热传导方程的稳定性问题, 在方程的解是充分光滑的情况下, 通过有限元分析的方法, 在理论上严格的证明了对于任意非均匀正则网格和 k 次分段多项式间断有限元空间, 当 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件取为 $\tau \leq \lambda \mu^{-2} h^2$ 时, 算法是 L^2 稳定的, 其中 τ, h 分别是时间步长和空间步长, μ, λ 是与 h, τ 无关的常数。

关键词: Runge-Kutta 法; 局部间断 Galerkin 方法; 稳定性分析; 热传导方程; L^2 稳定

DOI: 10. 15938/j. jhust. 2017. 06. 020

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2017)06-0109-04

Stability Analysis of the Explicit Runge-Kutta Local Discontinuous Galerkin Method

BI Hui, QIAN Chen-geng

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: To analyze the stability of the local discontinuous Galerkin method for heat equation, where the time discretization is the explicit TVD Runge-Kutta method. For the sufficiently smooth solution case, when the finite element space is the k -th order piecewise polynomial space on the regular meshes, we use the finite element analysis technique to proof the L^2 -norm stability for heat equation under the CFL condition $\tau \leq \lambda \mu^{-2} h^2$, where τ, h are the time step and the length of the element respectively, and μ, λ are constants independent of h, τ .

Keywords: Runge-Kutta; finite element; stability analysis; partial differential equations; L^2 -norm stability

0 引 言

间断有限元是一类有限元空间取为间断多项式空间的有限元方法, 具有易于实现 h - p 自适应性和灵活处理复杂计算区域等优点。该方法由 Reed 和 Hill 于 1973 年在求解稳态的中子运输方程时提

出^[1]。上世纪 80 年代末 90 年代初, Cockburn 和 Shu 针对非线性发展型双曲守恒律方程提出了 TVD Runge-Kutta 间断有限元方法, 详细的讨论了方程组以及多维问题^[2-4]。1998 年, 根据 Bassi 和 Rebay 对于粘性 Navier-Stokes 方程成功的计算结果^[5], Cockburn 和 Shu 又把这个方法推广到了求解对流扩散方程, 提出了局部间断有限元思想^[6]。2002 年,

收稿日期: 2016-01-21

基金项目: 国家自然科学基金(51406044)。

作者简介: 毕 卉(1982—), 女, 副教授, 硕士研究生导师, E-mail: bi_hui2002@aliyun.com;

钱琛庚(1990—), 男, 硕士研究生。

Yan 和 Shu 针对含有高阶空间导数的偏微分方程给出了局部间断有限元算法^[8]。更多关于间断有限元和局部间断有限元的研究现状可以查阅综述性文献^[10-13]和专著^[14]。注意到,间断有限元法只用于空间离散,在时间离散方面,对于热传导方程,可以采用显式的时间离散格式^[17],而高阶问题则需要效率更高的隐式或半隐式格式^[18]。同时,随着问题的深入,近年来关于间断有限元和局部间断有限元方法的稳定性问题的研究也逐步展开。2004 年,Zhang 和 Shu 首次给出了非线性双曲守恒律方程的二阶显式 TVD Runge-Kutta 间断有限元方法的稳定性分析^[9]。2010 年,Zhang 和 Shu 讨论了三阶显式 TVD Runge-Kutta 间断有限元解线性双曲守恒律方程的 L^2 稳定性问题^[20]。2015 年,Wang 和 Shu 又讨论了半隐式的 Runge-Kutta 局部间断有限元解非线性对流扩散方程时的稳定性问题^[21]。由于全离散格式的复杂性,目前关于稳定性分析的研究成果并不多。

本文考虑求解带有周期边界条件的热传导方程

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx}, (x, t) \in [0, 2\pi] \times [0, T] \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

的二阶显式 TVD Runge-Kutta 局部间断有限元方法的稳定性问题。主要结构如下:第 1 节给出二阶显式 TVD Runge-Kutta 局部间断有限元的全离散格式和一些引理;第 2 节是主要结论的证明;最后,给出结论和将来工作的展望。

1 局部间断有限元

1.1 局部间断有限元算法

在讨论间断有限元方法之前,先将 $\Omega = [0, 2\pi]$ 进行网格剖分:

$$0 = x_{1/2} < x_{1+1/2} < \cdots < x_{N+1/2} = 2\pi$$

记区间 $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, 区间长度 $h_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, 最大区间长度 $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$ 。设间断有限元空间

$$V_h^k = \{v_h \in L^2, v_h|_{I_j} \in P^k(I_j)\}$$

其中: $P^k(I_j)$ 表示区间 I_j 上次数不超过 k 次的多项式空间; V_h^k 中的元素允许在相邻的区间 I_j, I_{j+1} 交界处 $x_{j+1/2}$ 完全间断,所以这里用 $p_{j+1/2}^-$ 和 $p_{j+1/2}^+$ 分别表示 p 在点 $x_{j+1/2}$ 的左右极限。同时记

$$[]_{j+1/2} = p_{j+1/2}^+ - p_{j+1/2}^-$$

为了构造间断有限元方法,引入新的变量 q ,考虑与方程(1)等价的方程组

$$u_t = q_x \quad q = u_x$$

对上面的方程组两边同时乘以检验函数 $v_h, w_h \in V_h^k$, 并用 $u_h, q_h \in V_h^k$ 代替真解 u, q , 在单元 I_j 上对 x 使用分部积分便得到半离散的局部间断有限元格式:即求 $u_h, q_h \in V_h^k$, 使其满足

$$\begin{aligned} ((u_h)_t, v_h)_j &= \hat{q}_h v_h^-|_{j+1/2} - \hat{q}_h v_h^+|_{j-1/2} - (q_h, (v_h)_x)_j \\ (q_h, w_h)_j &= \hat{u}_h w_h^-|_{j+1/2} - \hat{u}_h w_h^+|_{j-1/2} - (u_h, (w_h)_x)_j \end{aligned}$$

其中 $(\cdot, \cdot)_j$ 表示 I_j 上的 L^2 内积, 记 $(a, b) = \sum_{j=1}^N (a, b)_j$, 而这里的 $\hat{q}_h, \hat{u}_h$ 是交替数值通量, 通常有两种取法:

$$1) \hat{u}_h = u_h^-, \hat{q}_h = q_h^+$$

$$2) \hat{u}_h = u_h^+, \hat{q}_h = q_h^-$$

通过选取基函数和小矩阵求逆的过程,可以得到半离散的常微分方程组

$$U_t = F(U, t)$$

此时,只需再使用适当的时间离散,便可以得到方程(1)的数值解。这里的时间离散方法,选为二阶显式 TVD Runge-Kutta 法,即

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F(U^n)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}U^{n+1} + \frac{1}{2}\Delta t F(U^{n+1})$$

1.2 间断有限元空间的性质

首先给出 I_j 上的 l 次 Sobolev 范数

$$\|u\|_{l, I_j} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq l} \|\partial_x^\alpha u\|_{I_j}^2 \right)^{1/2}$$

其中 $\|\cdot\|_{I_j}$ 是 I_j 上标准的 L^2 范数。则 Ω 上的分裂 Sobolev 空间的范数定义为

$$\|u\|_l = \left(\sum_{j=1}^N \|u\|_{l, I_j}^2 \right)^{1/2}$$

为方便起见,当 $l=0$ 时,我们记 $\|\cdot\|$ 为 $\|\cdot\|_0$ 。另外,在边界上的范数定义为:

$$\|u\|_{\Gamma_h} = \left(\sum_{j=1}^N (u_{j+1/2}^-)^2 + (u_{j-1/2}^+)^2 \right)^{1/2}$$

为了方便进一步的讨论,我们给出有限元空间 V_h^k 的两个插值性质。

性质 1^[22] 对任意 $v_h \in V_h^k$, 存在与 v_h, h 无关的常数 μ_i ($i=1, 2$), 使得

$$(I) \|(v_h)_x\| \leq \mu_1 h^{-1} \|v_h\|$$

$$(II) \|v_h\|_{\Gamma_h} \leq \mu_2 h^{-1/2} \|v_h\|$$

为了证明方便和结论简洁,定义常数 $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$ 。

下面再给出在证明中非常有用的 DG 离散算子

$$H_j^-(w, v) = (w, v_x)_j - w_{j+1/2}^- v_{j+1/2}^- + w_{j-1/2}^- v_{j-1/2}^+$$

$$H_j^+(w, v) = (w, v_x)_j - w_{j+1/2}^+ v_{j+1/2}^- + w_{j-1/2}^+ v_{j-1/2}^+$$

并记 $H^\pm(w, v) = \sum_{j=1}^N H_j^\pm(w, v)$ 。对于算子 $H^\pm(\cdot, \cdot)$,

在周期边界条件下,可得到如下引理。

引理 1 [2] 在周期边界条件下,DG 离散算子满足:

$$H^{\pm}(w, v) = (w, v_x) + \sum_{j=1}^N [v]_{j+1/2} w_{j+1/2}^{\pm}$$

$$H^+(w, v) + H^-(w, v) = 0$$

最后,我们给出全离散的二阶显式 TVD Runge-Kutta LDG 法的格式:数值通量取做 $\hat{u}_h = u_h^-, \hat{q}_h = q_h^+$ 时,假设从 $n\tau$ 到 $(n+1)\tau$ 时刻的数值解为 $u_h^n, u_h^{n+1}, u_h^{n+1}$ 以及 $q_h^n, q_h^{n+1}, q_h^{n+1}$,则在区间 I_j 上,对任意的 $v_h, w_h \in V_h^k$,满足:

$$(u_h^{n+1}, v_h)_j = (u_h^n, v_h)_j - \tau H_j^+(q_h^n, v_h) \quad (2)$$

$$(u_h^{n+1}, w_h)_j = \frac{1}{2} (u_h^n, w_h)_j + \frac{1}{2} (u_h^{n+1}, w_h)_j - \frac{\tau}{2}$$

$$H_j^+(q_h^{n+1}, w_h) \quad (3)$$

$$(q_h^{n+1}, v_h)_j = -H_j^-(u_h^{n+1}, v_h), l=0, 1, 2 \quad (4)$$

其中

$$u_h^{n,0} = u_h^n, u_h^{n,2} = u_h^{n+1}$$

$$q_h^{n,0} = q_h^n, q_h^{n,2} = q_h^{n+1}$$

2 全离散格式的稳定性分析

下面,我们将给出全离散格式(2)~(4)的稳定性分析。

定理 1 假设 u_h 是方程(1)的二阶显式 TVD Runge-Kutta 局部间断有限元解。在 $\Omega = [0, 2\pi]$ 的任意网格上,当 CFL 条件取为 $\tau \leq \lambda \mu^{-2} h^2$ 时,有

$$\|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^n\|$$

其中: $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$, $\lambda = 6 - 4\sqrt{2}$ 。

证明: 根据对称性,我们只考虑数值通量取为

$\hat{u}_h = u_h^-, \hat{q}_h = q_h^+$ 的情况。引入记号:

$$B_1 s_h = s_h^{n,1} - s_h^n, B_2 s_h = s_h^{n+1} - s_h^{n,1}$$

全离散格式(2)、(3)对 j 求和后得到

$$(B_1 u_h, v_h) = -\tau H^+(q_h^n, v_h) \quad (5)$$

$$(B_2 u_h, w_h) = -\frac{1}{2} (B_1 u_h, w_h) - \frac{\tau}{2} H^+(q_h^{n+1}, w_h) \quad (6)$$

把式(5)代入(6)中可得

$$(B_2 u_h, w_h) = \frac{\tau}{2} H^+(q_h^n, v_h) - \frac{\tau}{2} H^+(q_h^{n+1}, w_h) = -\frac{\tau}{2} H^+(B_1 q_h, v_h) \quad (7)$$

在方程(2)、(3)中取检验函数 $(v_h, w_h) = (u_h^n, 2u_h^{n+1})$,两式相加对 j 求和并化简得

$$\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2 = -\tau H^+(q_h^n, u_h^n) - \tau H^+(q_h^{n+1}, u_h^{n+1}) + \|u_h^{n+1} - u_h^{n,1}\|^2 = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

首先估计 Λ_1 。对于 Λ_1 ,注意到由引理 1 和式(4)有

$$H^+(q_h^n, u_h^n) = -H^-(u_h^n, q_h^n) = \|q_h^n\|^2$$

$$H^+(q_h^{n+1}, u_h^{n+1}) = -H^-(u_h^{n+1}, q_h^{n+1}) = \|q_h^{n+1}\|^2$$

所以

$$\Lambda_1 = -\tau H^+(q_h^n, u_h^n) - \tau H^+(q_h^{n+1}, u_h^{n+1})$$

$$= -\tau \|q_h^n\|^2 - \tau \|q_h^{n+1}\|^2$$

对于 Λ_2 。由式(7)和引理 1 得

$$\Lambda_2 = \|B_2 u_h\|^2 =$$

$$-\frac{\tau}{2} H^+(B_1 q_h, B_2 u_h) =$$

$$\frac{\tau}{2} H^-(B_2 u_h, B_1 q_h) =$$

$$\frac{\tau}{2} (B_2 u_h, (B_1)_-) + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N (B_2 u_h)_- [B_1 q_h]_{j+1/2}$$

根据柯西不等式和插值性质(I)有

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} (B_2 u_h, (B_1)_-) &\leq \frac{\tau}{2} \|B_2 u_h\| \cdot \|(B_1)_-\| \\ &\leq \frac{\tau}{2} \mu h^{-1} \|B_2 u_h\| \cdot \|B_1 q_h\| \end{aligned}$$

另一方面注意到

$$\sum_{j=1}^N [B_1 q_h]_{j+1/2}^2 \leq 2 \|B_1 q_h\|_{\Gamma_h}^2$$

再根据柯西不等式和插值性质(II)得

$$\frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^N (B_2 u_h)_- [B_1 q_h]_{j+1/2} \leq$$

$$\frac{\tau}{2} \|B_2 u_h\|_{\Gamma_h} \cdot \sqrt{2} \|B_1 q_h\|_{\Gamma_h} \leq$$

$$\frac{\sqrt{2}\tau}{2} \mu h^{-1} \|B_2 u_h\| \cdot \|B_1 q_h\|$$

所以

$$\|B_2 u_h\|^2 \leq \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \mu^2 h^{-2} \tau^2 \|B_1 q_h\|^2 \leq$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \mu^2 h^{-2} \tau^2 (\|q_h^n\|^2 + \|q_h^{n+1}\|^2)$$

最后,综合 Λ_1, Λ_2 的估计有

$$\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2 \leq$$

$$(\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \mu^2 h^{-2} \tau^2 - \tau) (\|q_h^{n,1}\|^2 + \|q_h^n\|^2)$$

所以当 $\tau \leq (6 - 4\sqrt{2}) \mu^{-2} h^2$ 时,有

$$\|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^n\|$$

3 结 论

本文证明了在时间和空间步长满足 $\tau \leq (6 -$

$4\sqrt{2})\mu^{-2}h^2$ 时,二阶显示 TVD Runge-Kutta 局部间断 Galerkin 方法是 L^2 稳定的。在将来的工作中,我们会讨论隐式或半隐式的时间离散方法结合局部间断有限元法的稳定性分析。

参 考 文 献:

- [1] REED W H, HILL T R. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation [R]. Los Alamos Scientific Lab. N. Mex. (USA), 1973.
- [2] COCKBURN B, SHU Chi-wang. The Runge-Kutta Local Projection Discontinuous-Galerkin Finite Element Method for Scalar Conservation Laws [J]. RAIRO-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 1991, 25(3): 337–361.
- [3] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws. II: General Framework [J]. Mathematics of Computation, 1989, 52(186): 411–435.
- [4] COCKBURN B, LIN S Y, SHU C W. The Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws III: One-dimensional Systems [J]. Journal of Computational Physics, 1989, 84(1): 90–113.
- [5] COCKBURN B, HOU S, SHU C W. The Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws. IV: The Multidimensional Case [J]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 545–581.
- [6] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V: Multidimensional Systems [J]. Journal of Computational Physics, 1998, 141(2): 199–224.
- [7] BASSI F, REBAY S. A High-order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131(2): 267–279.
- [8] COCKBURN B, SHU C-W. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-dependent Convection-diffusion Systems [J]. SIAM J Numer Anal, 1998(35): 2440–2463.
- [9] YAN J, SHU C-W. Local Discontinuous Galerkin Methods for Partial Differential Equations with Higher Order Derivatives [J]. J Sci Comput, 2002(17): 27–47.
- [10] COCKBURN B, SHU C W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-dominated Problems [J]. Journal of Scientific Computing, 2001, 16(3): 173–261.
- [11] SHU C W. A Brief Survey on Discontinuous Galerkin Methods in Computational Fluid Dynamics [J]. Advances in Mechanics, 2013(43): 541–554.
- [12] XU Y, SHU C. Local Discontinuous Galerkin Methods for Three Classes of Nonlinear Wave Equations [J]. Journal of Computational Mathematics, 2004, 22(2): 250–274.
- [13] SHU C W. Discontinuous Galerkin Methods: General Approach and Stability [J]. Numerical Solutions of Partial Differential Equations, 2009: 149–201.
- [14] SHU C W. Discontinuous Galerkin Method for Time-dependent Problems: Survey and Recent Developments [M]. Springer International Publishing, 2014: 25–62.
- [15] SHU C W. High Order WENO and DG Methods for Time-dependent Convection-dominated PDEs: A Brief Survey of Several Recent Developments [J]. Journal of Computational Physics, 2016, 316: 598–613.
- [16] HESTHAVEN J S, WARBURTON T. Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications [M]. Springer: Science & Business. Media, 2007.
- [17] SHU C W, OSHER S. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-capturing Schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439–471.
- [18] XIA Y, XU Y, SHU C-W. Efficient Time Discretization for Local Discontinuous Galerkin Methods [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2007, 8(3): 677.
- [19] ZHANG Q, SHU C W. Error Estimates to Smooth Solutions of Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Scalar Conservation Laws [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2004, 42(2): 641–666.
- [20] ZHANG Q, SHU C W. Stability Analysis and a Priori Error Estimates of the Third Order Explicit Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Scalarconservation Laws [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2010, 48(3): 1038–1063.
- [21] WANG H, SHU C-W, ZHANG Q. Stability Analysis and Error Estimates of Local Discontinuous Galerkin Methods with Implicit-explicit Time-marching for Nonlinear Convection-diffusion Problems [J]. Applied Mathematic and Computation, 2016, 272(2): 237–258.

(编辑: 温泽宇)